

Mathematische Grundlagen aus der Mittelstufe

Klaus Schoepe

Editorial

Für viele Bildungsgänge der BBS-Cuxhaven muss vorausgesetzt werden, dass die Schüler auf das in der Mittelstufe erworbene Wissen zurückgreifen können. Die Bildungsgänge der BBS können nicht die Schuljahre 1-9 noch einmal im „Schnelldurchgang“ wiederholen. Selbst punktuell Wiederholen ist oft schwer möglich, weil sich die Wissenslücken der Schülerinnen und Schüler jeweils an ganz unterschiedlichen Stellen befinden. Die Schülerinnen und

Schüler sind daher aufgefordert, ihre Lücken möglichst selbst oder mit Hilfe eines Förderunterrichtes zu schließen.

Diese kleine Broschüre soll dabei helfen. Hier sind die wichtigsten Informationen zusammengefasst, die man benötigt, um den mathematischen Einstieg in eine höhere Schulform zu schaffen. Wir möchten Ihnen mit dieser Broschüre die Möglichkeit bieten, Ihre mathematischen Grundlagenkenntnisse zu überprüfen und zu vertiefen.

Brauche ich das überhaupt? Ich habe doch immer einen Taschenrechner dabei

Ja, ich brauche es!

Mathematik hat gar nicht so viel mit dem Berechnen von Zahlen zu tun, sie ist eher wie eine Philosophie - es geht um Logik. Gerade die höhere Mathematik wagt sich dabei in abstrakte Welten hinaus, in denen Fremde völlig hilflos sind, wenn sie nicht die richtige Sprache sprechen und nicht die nötige Ausrüstung dabei haben. Die Sprache der Mathematik besteht aus Zahlen, Variablen und vor allem aus Gleichungen.

Die nötige ja unverzichtbare Ausrüstung zum Verständnis von Statistik, Differenzialrechnung, Integralrechnung und anderen Gebieten der Mathematik ist das sichere Rechnen. Dabei geht es aber nicht um das Rechnen mit Zahlen. Das könnten heutzutage tatsächlich der Taschenrechner oder das Smartphone übernehmen. Viel wichtiger ist das **Rechnen mit Variablen** und das fachgerechte **Umstellen von Gleichungen**. Denn nur so können neue Zusammenhänge erforscht, beschrieben und bewiesen werden.

Inhaltsverzeichnis

1	Vokabeln	4	8	Rechnen mit mehrfachen Minuszeichen	12
	Variablen	4	8.1	Subtraktion	12
	Konstanten:	4	8.2	Multiplikation	12
	Parameter	4	9	Punkt- vor Strichrechnung und was noch da-	12
	Term	4		zu gehört	
	Koeffizienten	4	9.1	Die vollständige Regel	12
1.1	Vokabeln für Rechenoperationen	4	10	Rechnen mit Klammern	13
1.1.1	Weitere häufig verwendete Abkür-	4	10.1	Anwenden des Distributivgesetzes, Aus-	13
	zungen der Mathematik sind	4		multiplizieren und Ausklammern	13
2	Mengen - Grundlagen und Vokabeln	5	10.2	Ausklammern	13
2.1	Bezeichnungen, Symbole, Fachsprache . . .	5		Beispiel	13
2.2	Die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ und $\mathbb{R}$	6		Ein Rezept fürs Ausklammern: . . .	13
3	Das Koordinatensystem	7	11	Regeln für das Rechnen mit Potenzen	14
4	Allgemeine Rechenregeln	7	12	Rechnen mit Wurzeln – Wurzeln sind auch	14
4.1	Vertauschungs- oder Kommutativgesetz . .	7		nur Potenzen	
4.2	Verknüpfungs- oder Assoziativgesetz	7	12.1	Anzahl der Lösungen und Wurzeln von ne-	14
4.3	Verteilungsgesetz oder Distributivgesetz . .	7		gativen Zahlen	14
	Aufgabe	7	13	Zehnerpotenzen und Gleitkommazahlen	15
5	Bruchrechnung	8	13.1	Gleitkommazahlen	15
5.1	Was ist ein Bruch?	8		Beispiele:	15
5.2	Umformen von Brüchen	8	13.2	Faustregeln:	15
	Erweitern:	8	13.3	Tabelle der internationalen Vorsilben für	15
	Beispiel:	8		Größenordnungen	15
	Kürzen:	8	13.4	Beispiele	15
	Beispiel:	8	14	Rechnen mit Einheiten	15
5.3	Rechenoperationen mit Brüchen	8		Beispiel:	15
5.3.1	Multiplikation von Zahl und Bruch	8	15	Gleichungen	16
5.3.2	Multiplikation zweier Brüche	8	15.1	Das Gleichheitszeichen	16
5.3.3	Division von Brüchen	8	15.2	Erlaubte Umformungen	16
5.3.4	Brüche addieren und subtrahieren	8	15.3	Äquivalenzumformungen	16
5.4	Brüche in Dezimalzahlen umrechnen	9	15.3.1	Mögliche Umformungen einer Gleichung:	16
5.4.1	Schreibweise „Periode“	9		Beide Seiten der Gleichung...	16
5.5	Dezimalzahlen in Brüche umrechnen	9		Beispiel:	16
	Beispiel:	9	15.3.2	Lösbarkeit von Gleichungen	16
	Beispiel mit unendlich vielen Nach-	9		Beispiel:	16
	kommastellen:	9		Beispiel:	16
5.6	Zusammenfassung der Regeln zur Bruch-	9		Beispiele für mathematische Wider-	16
	rechnung	9		sprüche	16
6	Dreisatz	10	15.4	Lineare Gleichungen	16
	Proportionaler Dreisatz	10	15.5	Quadratische Gleichungen	17
	Antiproportionaler Dreisatz	10		Andere Lösungsformeln	17
	Weitere Beispiele:	10	16	Lösen von Gleichungssystemen mit zwei Va-	18
7	Prozentrechnung	11		riablen	
7.1	Die Bedeutung des Prozentzeichens	11	16.1	Gleichungssysteme	18
	Beispiele:	11		Beispiel:	18
	Der Grundwert	11	16.2	Lösen linearer Gleichungssysteme	18
	Der Prozentwert	11	16.2.1	Einsetzungsverfahren	18
	Der Prozentsatz	11	16.2.2	Additions-/Subtraktions-Verfahren . .	18
7.2	Lösung mit Dreisatz	11	16.2.3	Gleichsetzungsverfahren	18
7.3	Lösung mit einer Gleichung	11			

17 Lösungen

	19
1.	19
2.	19
3.	19
4.	19

1.	19
2.	19
3.	19
4.	20

1 Vokabeln

Variablen Oft verwendet man in Rechnungen einen Buchstaben oder einen Namen, um damit anzudeuten, dass an Stelle dieser Stelle eine beliebige andere Zahl stehen könnte. Solche Platzhalter nennt man Variablen.

Beispiel Äpfel kosten $1,50 \frac{\text{€}}{\text{kg}}$ und die Plastiktüte $0,10 \text{ €}$. Dann berechnet sich der Äpfelpreis aus dem Gewicht x mit der Gleichung $P(x) = 1,50 \frac{\text{€}}{\text{kg}} + 0,10 \text{ €}$. Das x ist hier eine Variable.

Konstanten: sind Zahlen, die sich nicht verändern. Oft verwendet man für häufig genutzte Konstanten daher auch Buchstaben, wie die Kreiszahl π .

Beispiel Der Kreisumfang in Abhängigkeit vom Radius r ist $U(r) = 2 \cdot r \cdot \pi$. Hier ist r eine Variable, weil ein beliebiger Radius eingesetzt werden kann, die Zahl π ist eine

Konstante, weil sie stets den gleichen Wert hat.

Parameter Manchmal setzt man einen Buchstaben auch als Platzhalter ein, um eine Gleichung an dieser Stelle später mit einer Zahl zu optimieren oder anzupassen. Diese Buchstaben oder Symbole nennt man Parameter.

Term Ein Term ist eine sinnvolle Aneinanderreihung mathematischer Symbole.

Beispiele $x - 3$ oder $(2x - ra)^6$

Koeffizienten Wenn vor einer Variablen eine Zahl *als Faktor* oder ein Parameter steht, nennt man diese Zahl oder diesen Parameter auch Koeffizient.

Beispiel In dem Term $6, 2x^3 + 2x^2 + a_1x + a_0$ ist x die Variable und die Zahlen $6, 2$ und 2 sowie die Parameter a_1 und a_0 sind Koeffizienten.

1.1 Vokabeln für Rechenoperationen

	Term	a	b	c	Beispiel
Addition	$a + b = c$	Summand	Summand	Summe	$3 + 8 = 11$, $a3 - 2a = a$
Subtraktion	$a - b = c$	Minuend	Subtrahend	Differenz	$11 - 6 = 5$, $20b - 1b = 19b$
Multiplikation	$a \cdot b = c$	Faktor	Faktor	Produkt	$3 \cdot 8 = 24$, $2a \cdot 4a = 8a^2$
Division	$a : b = \frac{a}{b} = c$	Dividend (im Bruch: Zähler)	Divisor (im Bruch: Nenner)	Quotient	$36 : 9 = 4$, $\frac{12ab}{3a} = 4b$
Potenz	$a^b = c$	Basis	Exponent	Potenz	$2^4 = 16$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$
Wurzel	$\sqrt[b]{a} = c$	Radikant oder Wurzelbasis	Wurzelexponent	b -te Wurzel	$\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[5]{32} = 2$

1.1.1 Weitere häufig verwendete Abkürzungen der Mathematik sind

Zeichen	Bedeutung
$\wedge$	logisches „und“
$\vee$	logisches „oder“
$\Rightarrow$	„daraus folgt“

Beispiele

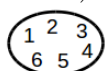
ich bin nass $\wedge$ ich bin draußen $\Rightarrow$ es regnet
 Es regnet $\Rightarrow$ ich bin nass $\vee$ ich habe einen Regenschirm
 $x + y = 5 \wedge y = 0 \Rightarrow x = 5$
 $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \vee x = -3$

2 Mengen - Grundlagen und Vokabeln

2.1 Bezeichnungen, Symbole, Fachsprache

Eine Menge ist eine Gruppe von vielen Einzelteilen, den sogenannten Elementen. Die Menge der möglichen Augenzahlen eines normalen Würfels ist $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Die Zahlen werden mit Semikolon getrennt, weil sie sonst von einer Dezimalzahl nicht zu unterscheiden wären.

Man kann Mengen auch als „Blasen“ (Venn-Diagramme) darstellen:



oder einfach



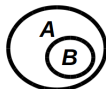
Mengen müssen nicht aus Zahlen bestehen. Die Menge aller Farben ist auch eine Menge.

Elemente

Die Teile m einer Menge M heißen Elemente. Man schreibt $m \in M$, sprich: „ m ist Element der Menge M “ oder $m \notin N$, wenn m nicht Teil der Menge N ist.

Teilmengen

Eine Teilmenge B ist vollständig in der Obermenge A enthalten:



In mathematischer Kurzschreibweise: $B \subset A$

„ $\subset$ “ heißt „...ist enthalten in“. Das Symbol „ $\subseteq$ “ heißt „...ist enthalten oder gleich“.

Oder: $A \supset B$ bzw. $A \supseteq B$. Das heißt: A ist Obermenge von B oder gleich B .

Vereinigungsmengen

Die Menge M ist eine Vereinigungsmenge aus den Mengen A und B , wenn ein Element m der Menge ein Element der Menge A und/oder der Menge B ist. Man schreibt: $M = A \cup B$.

Im Bild: $M =$ 

Schreib- und -Sprechweise

Streng mathematische Schreibweise:

$$M = \left\{ m \mid m \in A \vee m \in B \right\}$$

Das wird so übersetzt bzw. gelesen:

- Die Menge M ist gleich („ $M =$ “)
- den Elementen mit dem Namen m („ m “)
- für die gilt („ $\mid$ “)
- m ist Element von A („ $m \in A$ “)
- oder („ $\vee$ “)
- m ist Element von B („ $m \in B$ “)

Schnittmengen

Die Menge M ist eine Schnittmenge aus den Mengen A und B , wenn ein Element m der Menge ein Element der Menge A und der Menge B ist. Man schreibt:

$$M = A \cap B.$$

Im Bild: $M =$ 

Schreib- und -Sprechweise

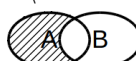
$$M = \left\{ m \mid m \in A \wedge m \in B \right\}$$

Das wird so übersetzt bzw. gelesen:

- Die Menge M ist gleich („ $M =$ “)
- den Elementen mit dem Namen m („ m “)
- für die gilt („ $\mid$ “)
- m ist Element von A („ $m \in A$ “)
- und („ $\wedge$ “)
- m ist Element von B („ $m \in B$ “)

Differenzmengen

Die Menge M ist die Differenzmenge aus den Mengen A und B , wenn ein Element m der Menge ein Element der Menge A ist, aber nicht Element der Menge B . Man schreibt: $M = A \setminus B$.

Im Bild: $M =$ 

Schreib- und -Sprechweise

$$M = \left\{ m \mid m \in A \wedge m \notin B \right\}$$

Das wird so übersetzt bzw. gelesen:

- Die Menge M ist gleich („ $M =$ “)
- den Elementen mit dem Namen m („ m “)
- für die gilt („ $\mid$ “)
- m ist Element von A („ $m \in A$ “)
- und („ $\wedge$ “)
- m ist nicht Element von B („ $m \notin B$ “)

Leere Menge

Die Leere Menge ist eine Menge ohne Elemente. Schreibweise: $M = \emptyset$

Selbstkontrolle: Was bedeuten folgende Symbole:

$\subset, \subseteq, \subsetneq, \in, \notin, \cup, \cap, \setminus, \emptyset, \{ \}, \wedge, \vee$

2.2 Die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ und $\mathbb{R}$

Es gibt unterschiedliche „Sorten“ von Zahlen.

Die „natürlichen Zahlen“ $\mathbb{N}$

Zum Zählen von Gegenständen braucht man die natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Wenn man Zahlen der Menge $\mathbb{N}$ addiert oder multipliziert, erhält man wieder eine Zahl aus $\mathbb{N}$.

Wird eine größere Zahl von einer kleineren abgezogen, so erhält man auch negative Zahlen. Wenn man diese Rechenoperationen mit Zahlen aus erlaubt, dann braucht man eine neue Zahlenmenge, denn negative Zahlen sind in $\mathbb{N}$ nicht enthalten.

Die „ganzen Zahlen“ $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Wenn Zahlen durcheinander geteilt werden, entstehen Brüche oder Dezimalzahlen. Für diese hat man die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ aufgestellt.

Die „rationalen Zahlen“ $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ q \mid q = \frac{a}{b} \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0 \right\}$$

Auf Deutsch: Die Menge der rationalen Zahlen ist die Menge aller Zahlen q , die sich als Bruch zweier ganzer Zahlen und darstellen lassen, wobei b nicht gleich Null sein darf.

Die „irrationalen Zahlen“ $\mathbb{I}$

Es gibt Zahlen, die nicht durch einen Bruch dargestellt werden können. Solche Zahlen haben unendlich viele Kommastellen, die ohne System aufeinander folgen. Beispiele für irrationale Zahlen sind die Zahl π , die Eulersche Zahl e sowie viele Wurzeln, wie $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$.

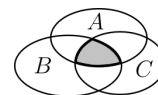
Die „Reellen Zahlen“ $\mathbb{R}$

Alle rationalen und irrationalen Zahlen zusammen bilden die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Das sind also die Menge aller nur denkbaren Dezimalzahlen und Brüche.

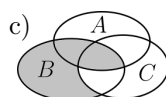
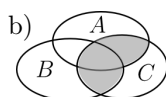
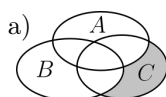
Aufgaben zur Mengenlehre

1. Was bedeutet und warum gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

2. Die Menge in der Abbildung rechts lässt sich schreiben, als $M = A \cap B \cap C$



Wie lautet die mathematische Beschreibung der unten abgebildeten Mengen?



3. Stelle folgende Mengen grafisch dar:

a) $(A \setminus B) \cap C$ b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$ c) $C \setminus (A \cup B)$

4. Gegeben sind folgende Zahlenmengen:

$$A = \left\{ a \in \mathbb{N} \mid a \leq 10 \right\}, \quad B = \left\{ b \in \mathbb{N} \mid 5 \leq b \leq 10 \right\} \text{ und } C = \left\{ c \in \mathbb{N} \mid c = 2 \cdot n \text{ mit } n \in \mathbb{N} \right\} \quad (= \text{gerade Zahlen})$$

Aus welchen Elementen bestehen folgende Mengen?

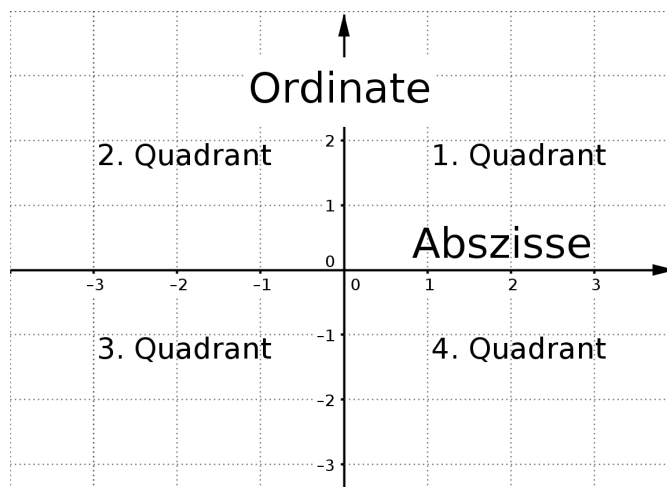
a) $A \cap B$ b) $B \cup C$ c) $B \setminus C$ d) $A \cup B$ e) $(A \cup B) \setminus C$

f) Wie lässt sich folgende Menge als Vereinigungs-, Schnitt- oder Differenzmenge den Mengen A , B und C beschreiben?

$$M = \{6, 8, 10\}$$

3 Das Koordinatensystem

Messwerte, Punkte, Geraden und Funktionsgraphen werden oft in einem Koordinatensystem dargestellt. Auch diesbezüglich gibt es einige Vokabeln zu lernen. Bei den meisten Anwendungen wird auf den Achsen eine Größe abgetragen, wie Zeit, Preis, Geschwindigkeit, oder anderes. In diesen Fällen hätten wir keine x- und y-Achse mehr, sondern z.B. eine Zeit- und eine Strecken-Achse. Es ist daher sinnvoll, den Koordinatenachsen Namen zu geben, die unabhängig von der jeweiligen Größe sind. Die horizontale Achse heißt Abszisse. Hier trägt man im allgemeinen die freie Variable ab, d.h. die Variable, die frei gewählt werden kann. Die vertikale (senkrechte) Achse heißt Ordinate. Auf der Ordinate werden in der Regel die abhängigen Variablen abgetragen, d.h. die, die z.B. aus den Werten der Abszisse berechnet werden. Die vier Felder, in die das Koordinatensystem von der Ordinate und der Abszisse unterteilt wird, werden als Quadranten bezeichnet. (Siehe Abbildung)



Bezeichnungen im Koordinatensystem

4 Allgemeine Rechenregeln

4.1 Vertauschungs- oder Kommutativgesetz

Bei der Addition und bei der Multiplikation dürfen die Summanden bzw. die Faktoren vertauscht werden. Man sagt, die Addition ist **kommutativ**. Es gilt:

$$a + b = b + a \text{ bzw. } a \cdot b = b \cdot a$$

Bei der Subtraktion und der Division gilt das Kommutativgesetz nicht:

$$a - b \neq b - a \text{ und } a : b \neq b : a \text{ bzw. } \frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$$

4.2 Verknüpfungs- oder Assoziativgesetz

Die Reihenfolge, in der man Summen und Produkte löst ist beliebig:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Aufgabe Setze für a , b und c Zahlen ein und teste die Rechengesetze in allen Variationen.

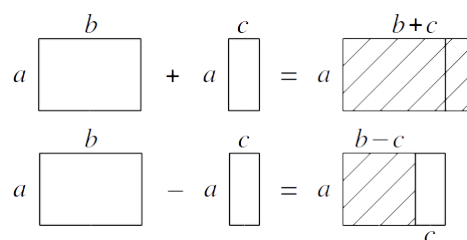
4.3 Verteilungsgesetz oder Distributivgesetz

Hier geht es um das Ausklammern bzw. darum Klammern aufzulösen:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

Oder in Bildern:



Veranschaulichung des Distributivgesetzes

5 Bruchrechnung

5.1 Was ist ein Bruch?

Mathematisch gesehen, ist ein Bruch eine Division, eine „Geteilt-Aufgabe“:

Den Zähler durch den
Nenner teilen:

$$\frac{a}{b} = a : b$$

Anschaulich ist Bruchrechnung wie Torten essen: Der Nenner gibt an, wie groß bzw. wie klein die Stücke sind und der Zähler gibt an, um wie viel Stücke es sich handelt.



Ein ganzer ($\frac{18}{18} = 1$) und ein angeschnittener ($\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$) Kuchen

Die abgebildeten Torten sind in 18 Stücke aufgeschnitten. Jedes $\frac{1}{18}$ -Stück ist recht klein. Eine halbe Torte besteht aus 9 solcher Stücke: $9 \cdot \frac{1}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$

Wann immer Sie sich bezüglich der Rechenregeln der Bruchrechnung nicht sicher sind, versuchen Sie sich den Sachverhalt in Tortenstücken vorzustellen.

5.2 Umformen von Brüchen

2 Menschen haben 4 Beine, 8 Menschen haben 16 Beine und 100 Menschen haben 200 Beine. In jedem Fall hat jeder Mensch nur 2 Beine, die Aussagen sind gleichwertig:

$$\frac{\text{Menschen}}{\text{Beine}} = \frac{2}{4} = \frac{8}{16} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$$

Erweitern: Das Multiplizieren von Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl verändert nicht den Wert des Bruches.

Beispiel: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$

Kürzen: Das Dividieren von Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl verändert nicht den Wert des Bruches.

Beispiel: $\frac{27}{36} = \frac{27/9}{36/9} = \frac{3}{4}$

5.3 Rechenoperationen mit Brüchen

5.3.1 Multiplikation von Zahl und Bruch

Wenn jemand nicht ein Stück einer der oben abgebildeten Torten ist, sondern 3, dann isst er $\frac{1}{6}$ des Kuchens: $3 \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{18} \cdot 3 = \frac{3 \cdot 1}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

Eine Zahl wird nur mit dem Zähler eines Bruches multipliziert.

5.3.2 Multiplikation zweier Brüche

Wenn jemand zwei Drittel eines der oben abgebildeten angeschnittenen Kuchens isst, dann isst er 10 Kuchenstücke:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{15}{18} = \frac{2 \cdot 15}{3 \cdot 18} = \frac{30}{54} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

Der Zähler wird mit dem Zähler und der Nenner wird mit dem Nenner multipliziert.

5.3.3 Division von Brüchen

Die oben abgebildete angeschnittene $\frac{15}{18}$ -tel Torte soll auf einen Erwachsenen und zwei Kinder aufgeteilt werden, wobei der figurbewusste Erwachsene nur halb so viel isst, wie ein Kind. Um zu berechnen, wie viel Stücke ein Kind essen kann, muss der Kuchen durch $2,5 = \frac{5}{2}$ geteilt werden:

$$\frac{\frac{15}{18}}{\frac{5}{2}} = \frac{15}{18} : \frac{5}{2} = \frac{15}{18} \cdot \frac{2}{5} = \frac{15 \cdot 2}{18 \cdot 5} = \frac{30}{90} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

Man verwendet dazu den Kehrwert des Divisors. Beim Kehrwert eines Bruches sind der Zähler und der Nenner vertauscht.

Wenn ein Bruch durch eine Zahl geteilt wird, dann wird nur der Nenner des Bruches mit dieser Zahl multipliziert:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot c} = \frac{a}{b \cdot c}$$

Für das Teilen von Brüchen gilt: **Mit dem Kehrwert Multiplizieren.**

5.3.4 Brüche addieren und subtrahieren

Das Addieren und Subtrahieren ist der schwierigste Teil der Bruchrechnung. Man kann von zwei $\frac{1}{3}$ -Kuchenstücken ohne Messer keinen halben Kuchen abziehen. Aber wenn man aus $\frac{2}{3}$ zuerst $\frac{4}{6}$ macht, dann kann man davon einen halben Kuchen – nämlich $\frac{3}{6}$ – abziehen. Daher gilt die Regel:

Beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen, müssen diese erst auf einen **gemeinsamen Nenner** gebracht, d.h. erweitert oder gekürzt werden.

Am einfachsten ist es, jeden Bruch mit dem Nenner des anderen Bruches zu erweitern:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{10+12}{15} = \frac{22}{15}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{10}{15} - \frac{12}{15} = \frac{10-12}{15} = \frac{-2}{15} = -\frac{2}{15}$$

5.4 Brüche in Dezimalzahlen umrechnen

Um einen Bruch in eine Dezimalzahl zu verwandeln, betrachtet man den Bruch einfach als Division und teilt den Zähler durch den Nenner.

Ein Beispiel:

$$\begin{array}{r} 3 : 8 = 0,375 \\ 30 \\ \underline{24} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

5.4.1 Schreibweise „Periode“

Bei vielen Brüchen kommt es bei der Umwandlung in Dezimalzahlen zu unendlich vielen Kommastellen: $\frac{1}{9} = 0,111\dots$

oder $\frac{41}{333} = 0,123123\dots$. In diesen Fällen gibt es eine Zahl oder eine Zahlenfolge, die sich unendlich oft wiederholt. Dieses wird in der Regel mit einem Strich über den sich wiederholenden Zahlen gekennzeichnet: $\frac{1}{9} = 0,\overline{1}$ (sprich: „Null Komma eins Periode“) oder $\frac{41}{333} = 0,\overline{123}$ (sprich: „Null Komma eins zwei drei Periode“).

5.5 Dezimalzahlen in Brüche umrechnen

Eine Dezimalzahl ist als Bruch darstellbar, wenn sie nicht unendlich viele Stellen hat oder wenn sie unendlich viele Stellen hat, die sich aber am Ende periodisch wiederholen.

Beispiel: $0,375 = \frac{375}{1000} \xrightarrow{\text{kürzen}} \frac{3}{8}$

Beispiel mit unendlich vielen Nachkommastellen:
 $q = 0,135135\dots = 0,\overline{135}$

$$\begin{array}{rcl} 1000 \cdot q & = & 135,135\dots \\ - & & q = 0,135\dots \\ \hline 999 \cdot q & = & 135 \end{array} \quad \begin{array}{l} : 999 \\ \hline \text{kürzen} \\ \hline \frac{135}{999} = \frac{5}{37} \end{array}$$

5.6 Zusammenfassung der Regeln zur Bruchrechnung

Wie bei den Tortenstücken gilt: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$

Dividieren

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$

Erweitern

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

Kürzen

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

Multiplizieren

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Potenzieren

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$$

Addieren,
Subtrahieren

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} \\ &= \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d} \end{aligned}$$

Aufgaben

1. Schreiben Sie ein Rezept, wie man Dezimalzahlen in Brüche umrechnet.

2. Sortieren Sie folgende Zahlen und Brüche nach ihrem Wert.

$$\frac{1}{2} \quad 0,75 \quad \frac{12}{16} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{36}{72} \quad \frac{60}{96} \quad \frac{52}{104} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{39}{52} \quad 0,625 \quad \frac{0,25}{0,5} \quad \frac{\frac{10}{32}}{8} \quad \frac{1500}{2000} \quad \frac{0,25}{0,4} \quad \frac{9,9}{19,8} \quad \frac{1}{\frac{4}{3}} \quad \frac{15}{32} \quad 0,5$$

3. Berechnen Sie: a) $4 \cdot \frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{7} + \frac{1}{2}$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ d) $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$ e) $\frac{12}{5} : \frac{16}{15}$ f) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{6}$ g) $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6}$

4. Wandeln Sie folgende Brüche in Dezimalzahlen und die Dezimalzahlen in Brüche um

$$\text{a) } \frac{7}{8} \quad \text{b) } \frac{4}{10} \quad \text{c) } \frac{73}{100} \quad \text{d) } \frac{268}{1000} \quad \text{e) } \frac{46}{1000} \quad \text{f) } \frac{45}{5} \quad \text{g) } \frac{26}{9} \quad \text{h) } 0,\overline{1} \quad \text{i) } 21,\overline{34} \quad \text{j) } 0,125 \quad \text{k) } 0,\overline{100} \quad \text{l) } 45,6\overline{123456}$$

6 Dreisatz

Der Dreisatz ist eine Sorte von Mathematikaufgaben, die wirklich jeder Mensch in seinem Leben ständig brauchen wird; sei es beim Einkaufen, beim Kochen nach Rezept und in vielen anderen Situationen. Beim Dreisatz geht es immer um das Verhältnis zweier unterschiedlicher Größen, hier Größe A und Größe B: Man unterscheidet zwei Fälle:

Proportionaler Dreisatz liegt vor, wenn sich aus einem Sachverhalt ergibt: „Wenn sich Größe A verdoppelt, verdoppelt sich auch Größe B“ oder „Wenn sich Größe A halbiert, dann halbiert sich auch Größe B“. Mathematisch könnte das so formuliert werden: $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$ oder $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Antiproportionaler Dreisatz lässt sich immer so formulieren: „Verdoppelt sich die Größe A, so halbiert sich Größe B“ oder umgekehrt. Das heißt mathematisch: $A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2$ oder $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_2}{B_1}$.

Ein Beispiel für proportionalen Dreisatz 2kg Äpfel kosten 1,10€. Wie viel kosten 3,6kg Äpfel?

Lösung 1: Wenn sich das Gewicht der Äpfel verdoppelt, kostet das auch doppelt so viel, daher ist dies ein proportionaler Dreisatz. Für die gesuchte Größe wird ein x eingesetzt: Lösungsvariante 1: Stelle die Verhältnisse als Bruch dar und löse nach x auf:

$$\frac{1,10\text{€}}{2\text{kg}} = \frac{x}{3,6\text{kg}} \quad | \cdot 3,6\text{kg} \Rightarrow x = \frac{1,10\text{€} \cdot 3,6\text{kg}}{2\text{kg}} = 1,98\text{€}$$

Lösung 2: mit einer Tabelle

	Äpfel	Euro	
$: 2$	2 kg	1,10€	$: 2$
$\cdot 3,6$	1 kg	0,55€	$\cdot 3,6$
	3,6 kg	x	

Ein Beispiel für antiproportionalen Dreisatz Eine 25-köpfige Gruppe plant eine Reise mit einem Bus. Jeder muss 24€ bezahlen. Es werden aber 5 Personen krank. Daher muss das Geld für den Bus nun von 20 Personen bezahlt werden. Wie viel muß jede der 20 Personen nun zahlen?

Lösung Da der Bus einen festen Preis kostet, gilt: Fahren doppelt so viel Personen mit, dann zahlen sie pro Kopf nur die Hälfte (vorausgesetzt der Bus ist groß genug). Halbiert sich die Personenzahl, dann verdoppelt sich der Preis pro Kopf. Also ist dies ein antiproportionaler Dreisatz.

Lösung 1: Stelle die Verhältnisse als Produkt dar und löse nach x auf:

$$25 \cdot 24\text{€} = 20 \cdot x \quad | : 20 \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 24\text{€}}{20} = 30\text{€}$$

Lösung 2: Mit einer Tabelle

	Personen	Euro	
$: 25$	25	24€	$: 25$
$\cdot 20$	1	600€	$\cdot 20$
	20	x	

In der Tabelle wird beim antiproportionalen Dreisatz also auf der rechten Seite die jeweils umgekehrte Rechenoperation der linken Seite durchgeführt.

Weitere Beispiele:

- Für eine Pizza für 6 Personen braucht man Mehl. Wie viel braucht man für 14 Personen?
- Ein Schwimmbecken wird von 3 Pumpen in 2 Stunden geleert. Wie lange brauchen 5 Pumpen dazu?

7 Prozentrechnung

7.1 Die Bedeutung des Prozentzeichens

Wenn man das Verhältnis zweier Größen abschätzen möchte, verwendet man Prozentrechnung: 32 Menschen verhalten sich zu 80 wie 40 zu 100. Das Prozentzeichen % ist dabei keine Einheit, wie Gramm oder Meter, sondern es bedeutet eine Rechenoperation: „ $\cdot 1/100$ “ oder „ $\cdot 0,01$ “. Das Prozentzeichen heißt übersetzt „pro hundert“.

„%“ bedeutet: Teile durch hundert oder multipliziere mit 0,01

Beispiele:

- $100\% = \frac{100}{100} = 100 \cdot 0,01 = 1$
- $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0,25$
- $7\% = \frac{7}{100} = 0,07$
- $0,1\% = \frac{0,1}{100} = 0,001$

Hier ist noch einmal die Gelegenheit Werbung für Brüche zu machen: „20% des Stromes kam 2011 aus erneuerbaren Energien“ ist weniger anschaulich als „ $\frac{1}{5}$ des Stromes ...“. Oft ist es deutlicher, wenn man eine etwas ungenauere Angabe macht. Die Aussage „35% der Bevölkerung ist unzufrieden mit seiner Regierung“ wäre klarer, wenn es hieße: „Mehr als ein Drittel der Bevölkerung ist unzufrieden mit seiner Regierung“ oder „Jeder dritte ...“.

Eine übliche Aufgaben zur Prozentrechnung ist:

17 von 25 Schülerinnen haben in einer Klassenarbeit eine Eins oder eine Zwei geschrieben. Wie viel Prozent sind das, wie viel wären das von 100?

Bei der Prozentrechnung gilt es grundsätzlich, drei Zahlen auseinander zu halten:

Der Grundwert ist die Grundgesamtheit („das was zuerst da war“). In diesem Beispiel $GW = 25$ Schülerinnen.

Der Prozentwert ist die Zahl, die mit dem Grundwert verglichen wird, das ist hier $PW = 17$.

Der Prozentsatz ist der Vergleichswert zu 100: 17 zu 25 verhält sich wie 68 zu 100, also $PS = 68$.

7.2 Lösung mit Dreisatz

Prozentrechnung lässt sich immer mit dem Dreisatz lösen:

$$\frac{x}{100} = \frac{17}{25} \Rightarrow x = \frac{17 \cdot 100}{25} = 68$$

7.3 Lösung mit einer Gleichung

Bei der Prozentrechnung genügt es, sich eine Gleichung zu merken, wenn man in der Lage ist, diese nach der gesuchten Größe umzustellen:

$$PW = \frac{GW \cdot PS}{100}$$

Wer sich mit dem Umstellen dieser Gleichung schwer tut, der muss auch noch diese beiden Gleichungen lernen:

$$GW = \frac{100 \cdot PW}{PS}$$

$$PS = \frac{100 \cdot PW}{GW}$$

In der Prozentrechnung sind immer zwei der drei Größen PW , GW oder PS bekannt. Daher lässt sich die unbekannte dritte Größe mit Hilfe oben stehender Formeln daraus berechnen.

Aufgaben

- Der Kaffee kostete letzte Woche 2,96€. Nun ist der Preis um 10% gestiegen. Wie viel kostet der Kaffee jetzt?
- In diesem Jahr bekommen 5 Schüler der Klasse 10a eine 1 in Physik, das sind 25% der Klasse. Wie groß ist die Klasse?
- 8 von 240 Schülern der 10-ten Klassen sind Raucher. Wie viel Prozent sind das?

8 Rechnen mit mehrfachen Minuszeichen

8.1 Subtraktion

Zwei Minuszeichen hintereinander ergeben ein Plus:
 $2 - (-10) = 12$.

Wenn Heinz seinem Freund Peter Schulden (negativer Betrag) „wegnehmen“ (minus) möchte, dann muss er ihm Geld geben, also „plus“. Stehen mehrere Minuszeichen hintereinander, dann gilt wieder von innen nach außen:

$$\begin{aligned} & -(-(-(-1))) \\ = & -(-(+1)) \\ = & -(-1) \\ = & 1 \end{aligned}$$

Man kann sich auch merken: Eine **gerade Anzahl** von aufeinander folgenden Minuszeichen wird zu **Plus** und eine **ungerade Anzahl** von aufeinander folgenden Minus-

zeichen wird zu **Minus**.

8.2 Multiplikation

Die Multiplikation zweier Negativer Zahlen ergibt immer eine Positive Zahl, denn Minus mal Minus ergibt Plus:

$$(-2) \cdot (-8) = 16$$

Minus mal Minus mal Minus ergibt dagegen das Gleiche wie Plus mal Minus und das ist Minus:

$$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

Es gilt wieder: Eine **gerade Anzahl** negativer Faktoren ergibt eine **positive** Zahl und eine **ungerade Anzahl** negativer Faktoren ergibt eine **negative** Zahl.

9 Punkt- vor Strichrechnung und was noch dazu gehört

Vielleicht das wichtigste Werkzeug zur Strukturierung mathematischer Terme sind Klammern (siehe nächstes Kapitel). Das Rechnen mit Klammern ist eigentlich ganz einfach, weil es immer nach den gleichen Regeln erfolgt:

Klammern werden immer zuerst berechnet.

Gibt es mehrere verschachtelte Klammern, dann wird immer zuerst die innerste Klammer gelöst. Wenn die berechnet und aufgelöst ist, gibt es evtl. eine neue innerste Klammer. Das macht man so lange, bis es keine Klammern mehr gibt. Dann erfolgt die Potenz-, die Punkt- und die Strichrechnung. Dies führt zu der Regel:

Mathematische Terme werden nicht von links nach rechts gelöst, sondern von innen nach außen.

9.1 Die vollständige Regel

Genau genommen müsste die Regel also nicht „Punkt- vor Strichrechnung“ heißen, sondern:

1. Innere Klammern ...
2. ... vor äußeren Klammern ...
3. ... vor Potenz- ...
4. ... vor Punkt- ...
5. ... vor Strichrechnung.

Diese Regel kennt keine Ausnahme!

Dabei muss beachtet werden, dass die Division zur Punktrechnung gehört und nicht zur Strichrechnung, obwohl sie oft durch einen Bruchstrich aufgeschrieben wird.

Beispiel

$$a = 2 \cdot 3 - (3^2 - (4 - 4 \cdot 3^{(8-3 \cdot (0,5+1,5))} + 3) \cdot 2)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} a &= 2 \cdot 3 - (3^2 - (4 - 4 \cdot 3^{(8-3 \cdot (0,5+1,5))} + 3) \cdot 2) \\ &= 2 \cdot 3 - (3^2 - (4 - 4 \cdot 3^{(8-3 \cdot 2)} + 3) \cdot 2) \\ &= 2 \cdot 3 - (3^2 - (4 - 4 \cdot 3^{(8-6)} + 3) \cdot 2) \\ &= 2 \cdot 3 - (3^2 - (4 - 4 \cdot 3^2 + 3) \cdot 2) \\ &= 2 \cdot 3 - (3^2 - (4 - 36 + 3) \cdot 2) \\ &= 2 \cdot 3 - (3^2 - (-29) \cdot 2) \\ &= 2 \cdot 3 - (3^2 - (-58)) \\ &= 2 \cdot 3 - (9 + 58) \\ &= 2 \cdot 3 - 67 \\ &= 6 - 67 \\ &= -61 \end{aligned}$$

Zur Selbstkontrolle, überprüfe:

$$1 - (-2 - (-3 - (-4 - (-5 - (-6 - (-7 - (-8))))))) = 6$$

10 Rechnen mit Klammern

Klammern werden immer zuerst berechnet.

Es gibt drei Gründe Klammern zu setzen:

- Wenn die Regel Punkt-vor Strichrechnung umgangen werden soll
- Wenn eine Rechenoperation nicht nur mit einer Zahl, sondern mit einem ganzen Term vorgenommen wird (z.B. teilen durch $(x^2 - 4)$)
- Um zusammenhängende Aufgabenteile zu kennzeichnen. Diese Sorte von Klammern kann oft auch weggelassen werden. Ein Beispiel:

$$(7 + 3) + (2 + 8) + (9 + 1)$$

Hier sieht man sofort, dass das Ergebnis 30 ist. Ohne Klammern wäre das vielleicht nicht so schnell klar gewesen.

Ist eine Klammer ein Summand, d.h. es steht ein Pluszeichen davor und dahinter geht es mit Plus oder Minus weiter, dann kann sie auch weggelassen werden.

$$(7 + 3) + (2 + 8) + (9 + 1) = 7 + 3 + 2 + 8 + 9 + 1$$

Aufpassen muss man immer, WENN EIN MINUSZEICHEN VOR DER KLAMMER STEHT! Um in einem solchen Fall eine Klammer aufzulösen, muss JEDES Vorzeichen in der Klammer umgekehrt werden und dafür fällt das Minuszeichen vor der Klammer weg:

$$4 - (x^2 - 3a - 9 + 8 \cdot 2) = \\ 4 - x^2 + 3a + 9 - 8 \cdot 2$$

10.1 Anwenden des Distributivgesetzes, Ausmultiplizieren und Ausklammern

Zahlen mit Klammern multiplizieren

Wird eine Zahl mit einer Klammer multipliziert, dann muss JEDER SUMMAND in der Klammer mit dieser Zahl multipliziert werden:

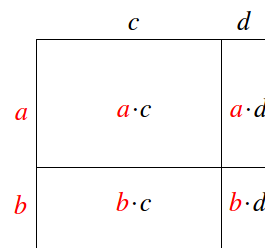
$$3 \cdot (4x - 2a + 8) = \\ 3 \cdot 4x - 3 \cdot 2a + 3 \cdot 8 = \\ 12x - 6a + 24$$

Klammern mit Klammern multiplizieren („Ausmultiplizieren“)

Werden zwei Klammern miteinander multipliziert gilt für die Summanden in den Klammern: „Jeder mit Jedem“:

$$(a + b) \cdot (c + d) = \\ a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = \\ a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Das lässt sich schön veranschaulichen, wenn man berücksichtigt, dass mit $a \cdot c$ die Fläche eines Rechteckes der Kantenlängen a und c berechnet wird:



Veranschaulichung des Produktes $(a + b) \cdot (c + d)$

Das gilt natürlich auch dann, wenn mehr als zwei Summanden in einer Klammer sind:

$$(x - 2) \cdot (2x - 3y + 7) \\ = x \cdot (2x - 3y + 7) - 2 \cdot (2x - 3y + 7) \\ = (2x^2 - 3xy + 7x) - (4x - 6y + 14) \\ = 2x^2 - 3xy + 7x - 4x + 6y - 14 \\ = 2x^2 - 3xy + 3x + 6y - 14$$

10.2 Ausklammern

Ausklammern ist die umgekehrte Operation zum Ausmultiplizieren. Ein mathematischer Term lässt sich in vielen Fällen mit Klammern einfacher schreiben. Wenn ein Term aus einer Summe von Produkten besteht und in JEDEM Summand der gleiche Faktor einmal vorkommt, dann kann man diesen Faktor ausklammern:

Beispiel $8ax - 24a^2x^2y + 12a^3$

$$8 \cdot a \cdot x - 24 \cdot a^2 \cdot x^2 \cdot y + 12 \cdot a^3 \\ = 2 \cdot 4 \cdot a \cdot x - 6 \cdot 4 \cdot a \cdot a \cdot x \cdot x \cdot y + 3 \cdot 4 \cdot a \cdot a \cdot a \\ = 4 \cdot a \cdot (2 \cdot x - 6 \cdot a \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot a^2)$$

also: $8ax - 24a^2x^2y + 12a^3 = 4a(2x - 6ax^2y + 3a^2)$

Man kann auch Klammern ausklammern:

$$3x(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) = (3x - 4)(x^2 - 1)$$

Und man kann auch Dinge ausklammern, die gar nicht in den Summanden stehen. Manchmal ist dieser kleine Trick sinnvoll:

$$2x^3 - x^2 + 6x - 5 = x^3(2 - \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{5}{x^3})$$

Wichtig ist, dass nach erneutem Ausmultiplizieren der Klammer der alte Term herauskommt.

Ein Rezept fürs Ausklammern: Wenn Sie sich für einen Faktor entschieden haben, den Sie ausklammern wollen, gehen Sie folgendermaßen vor: Schreiben Sie den alten Term in eine Klammer und Ihren Faktor davor. Dann teilen Sie *jeden* Summanden dieses Terms durch den vorangestellte Faktor und kürzen so weit Sie können:

$$8ax - 24a^2x^2y + 12a^3 = 4a(\frac{8ax}{4a} - \frac{24a^2x^2y}{4a} + \frac{12a^3}{4a}) \\ = 4a(2x - 6ax^2y + 3a^2)$$

11 Regeln für das Rechnen mit Potenzen

Regel	Beispiele
1 Definition: $a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n\text{mal}}$ dabei ist n eine ganze Zahl und a ist eine beliebige Zahl oder Variable	$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot 9 = 3 \cdot 27 = 81$, $x \cdot x \cdot x = x^3$, $f(x) \cdot f(x) = f^2(x)$, $\sin(x) \cdot \sin(x) = \sin^2(x)$
2 Hoch Eins: $a^1 = a$ lässt die Basis unverändert	$7^1 = 7$, $x^1 = x$, $(a+b)^1 = a+b$
3 Hoch Null: $a^0 = 1$ ist immer gleich Eins	$1001^0 = 1$, $x^0 = 1$, $\text{alles}^0 = 1$ sogar $0^0 = 1$ (!!)
4 Multiplikation von Potenzen a) Mit gleicher Basis: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ b) Mit gleichem Exponenten: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	a) $2^3 \cdot 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$ b) $4^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 = 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 = (4 \cdot 5)^2$
5 Division von Potenzen a) Mit gleicher Basis: $a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ b) Mit gleichem Exponenten: $a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	a) $\frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^{5-3} = 2^2$ b) $\frac{3^4}{5^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^4$
6 Potenzieren von Potenzen $a^{n^m} = (a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$5^{2^3} = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^{2+2+2} = 5^{3 \cdot 2}$
7 Negative Exponenten: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, $14^{-5} = \frac{1}{14^5}$, $(x-3)^{-2} = \frac{1}{(x-3)^2}$
8 Brüche im Exponenten: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ und $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ Oder mit Dezimalzahlen: $a^{\frac{1}{2}} = a^{0,5}$	$64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 64^{0,5} = 8$, $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$, $3^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{3^5} = 3^{1,25}$
9 Addieren oder Subtrahieren von Potenzen lässt sich nicht vereinfachen	$5^3 + 5^4$, $3^5 - 4^5$ lassen sich nicht vereinfachen

12 Rechnen mit Wurzeln – Wurzeln sind auch nur Potenzen

Wegen der 8. Rechenregel für Potenzen, kann man Wurzeln auch als Potenzen schreiben. Es gelten für Wurzeln daher die gleichen Rechenregeln, wie für Potenzen im Falle gleicher Exponenten (4b) und 5b)

Es gilt $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (siehe oben) und $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ also auch für die Quadratwurzel: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = a^{0,5}$	
1 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ (→ Siehe Potenzregeln 8 und 4 a))	$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36}$, $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{216}$
2 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{\frac{36}{4}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}}$
3 $(\sqrt[n]{a})^b = \sqrt[n]{a^b} = a^{\frac{b}{n}}$	$(\sqrt[3]{8})^2 = \sqrt[3]{8^2}$
4 $\sqrt{a+b} \rightarrow$ Siehe Potenzregel 9)	Lässt sich <i>nicht</i> anders schreiben. Zuerst die Summe berechnen, dann die Wurzel ziehen

12.1 Anzahl der Lösungen und Wurzeln von negativen Zahlen

$3 \cdot 3 = 9$ und $(-3) \cdot (-3) = 9$ Daraus folgt, dass es für $\sqrt{9}$ zwei Lösungen gibt, 3 und -3. Eine abkürzende Schreibweise dafür ist $\sqrt{9} = \pm 3$. Es gibt aber keine Quadratwurzel von negativen Zahlen, wie $\sqrt{-9}$. **Wenn der Wurzelexponent gerade ist, dann gibt es keine Lösung für negative Zahlen.**

Das ist anders bei einer dritten Wurzel: $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$ also ist $\sqrt[3]{-8} = -2$. **Wenn der Wurzelexponent ungerade ist, kann man auch die Wurzel aus negativen Zahlen berechnen.** Dann gibt es als Ergebnis aber nur eine Lösung

13 Zehnerpotenzen und Gleitkommazahlen

Eine der häufigsten Anwendungen von Potenzen ist die Darstellung sehr großer und sehr kleiner Zahlen mit Zehnerpotenzen.

Die Zahl 10000 kann auch als $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$ geschrieben werden. Genauso könnte man 230000 als $2,3 \cdot 10^5$ schreiben. Das geht auch bei kleinen Zahlen: $0,000007 = 7 \cdot 0,1^6 = 7 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^6 = 7 \cdot \frac{1}{10^6} = 7 \cdot 10^{-6}$.

13.1 Gleitkommazahlen

In der Gleitkommadarstellung wird jede Zahl als ein Produkt von einer Kommazahl zwischen 1 und 10 mit einer Zehnerpotenz geschrieben.

Das hat den Vorteil, dass man an Hand der Zehnerpotenz sofort die Größenordnung einer Zahl erkennen kann: Handelt es sich um Hunderte oder Tausende oder nur um Millionstel?

Beispiele:

$2102300 = 2,1023 \cdot 10^6$ oder $0,009876500 = 9,8765 \cdot 10^{-3}$

13.2 Faustregeln:

Wird eine Zahl umgewandelt, die größer als 10 ist, dann ist der Exponent der Zehnerpotenz die Anzahl Stellen vor dem Komma minus 1: $84257,67 = 8,425767 \cdot 10^4$ oder $50000,0 = 5,0 \cdot 10^4$

Bei kleinen Zahlen zählt man einfach die Nullen, einschließlich der Null vor dem Komma. Das Ergebnis ist der negative Exponent der Zehnerpotenz:

$$\bullet \overset{1}{0},\overset{2}{0}\overset{3}{0}12 = 1,2 \cdot 10^{-3}$$

$$\bullet \overset{1}{0},8 = 8 \cdot 10^{-1}$$

$$\bullet \overset{1}{0},\overset{2}{0}\overset{3}{0}\overset{4}{0}\overset{5}{0}\overset{6}{0}231 = 2,31 \cdot 10^{-6}$$

$$\bullet \overset{1}{0},\overset{2}{0}3004 = 3,004 \cdot 10^{-2}$$

13.3 Tabelle der internationalen Vorsilben für Größenordnungen

In der Technik haben viele häufig verwendete Zehnerpotenzen einen Namen bekommen. Hier ist eine Auswahl davon:

Zehnerpotenz	Vorsilbe	Zehnerpotenz	Vorsilbe
$1 = 10^0$		$0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$	$d = \text{dezi}$
$10 = 10^1$		$0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10 \cdot 10} = 10^{-2}$	$c = \text{centi}$
$100 = 10 \cdot 10 = 10^2$	$h = \text{Hekto}$	$0,001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = 10^{-3}$	$m = \text{milli}$
$1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$	$k = \text{Kilo}$	$0,000001 = 10^{-6}$	$\mu = \text{mikro}$
$1\,000\,000 = 10^6$	$M = \text{Mega}$	$0,000000001 = 10^{-9}$	$n = \text{nano}$
$1\,000\,000\,000 = 10^9$	$G = \text{Giga}$	$0,000000000001 = 10^{-12}$	$p = \text{piko}$
$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$	$T = \text{Terra}$		

13.4 Beispiele

- Lichtgeschwindigkeit: $c_L \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 3 \cdot 10^5 \frac{km}{s}$
- Gewicht der Erde: $M_E \approx 5,974 \cdot 10^{24} kg = 5,974 \cdot 10^{21} t = 5,974 \cdot 10^9 Tt$ ($Tt = \text{Terra-Tonnen}$)
- Mittlerer Radius der Erde: (Der Radius ist der halbe Durchmesser) $R_{Erde} \approx 6,4 \cdot 10^6 m = 6,4 \cdot 10^3 km$
- Radius eines Goldatoms: $R_{Gold} \approx 1,4 \cdot 10^{-10} m = 0,14 nm$ ($nm = \text{Nanometer}$)
- Radius einer Mandarine: $R_{Mandarine} \approx 5,0 \cdot 10^{-2} m = 5 cm$

14 Rechnen mit Einheiten

Insbesondere wenn Potenzen im Spiel sind, geschehen beim Umrechnen von Einheiten häufig Fehler: Es gibt eine Standardregel, die immer funktioniert:

Ignoriere zuerst alle Zahlen und ersetze zunächst nur die Einheiten, wenn nötig mit Zehnerpotenzen. Erst dann wird alles zusammengerechnet:

Beispiel: Wie viel sind $250m^2$ in km^2 ?

$1m = \frac{1}{1000} km$ Ersetze daher m durch $\left(\frac{1}{1000} km\right)$

$$\begin{aligned} 250m^2 &= 250 \cdot \left(\frac{1}{1000} km\right)^2 = 250 \cdot (10^{-3} km)^2 \\ &= 2,5 \cdot 10^2 \cdot (10^{-3})^2 \cdot km^2 \\ &= 2,5 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot km^2 \\ &= 2,5 \cdot 10^{2-6} km^2 = \underline{\underline{2,5 \cdot 10^{-4} km^2}} \end{aligned}$$

15 Gleichungen

15.1 Das Gleichheitszeichen

Das Gleichheitszeichen ist vielleicht das wichtigste Zeichen der Mathematik. Es steht zwischen zwei GLEICHEN Ausdrücken. Wenn auf der einen Seite des Gleichheitszeichens etwas verändert wird, dann MUSS die gleiche Änderung auch auf der anderen Seite erfolgen.

15.2 Erlaubte Umformungen

Eine Gleichung lässt sich gut mit einer Balkenwaage im Gleichgewicht vergleichen. Wenn nur auf der einen Seite etwas hinzugefügt wird, dann kommt sie aus dem Gleichgewicht. In Gleichungen werden logische Sachzusammenhänge mathematisch formuliert. In der Regel gibt es eine oder mehrere Variablen in einer Gleichung. Das Ziel einer Rechnung ist, eine Gleichung nach einer der Variablen aufzulösen:

Beim Umformen einer Gleichung sind fast alle mathematischen Operationen erlaubt, wenn sie auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens in gleicher Weise durchgeführt werden.

15.3 Äquivalenzumformungen

Wer ganz sicher gehen möchte, setzt beide Seiten der Gleichung erst einmal in Klammern und wendet auf diese Klammern die nötigen mathematischen Operationen an.

15.3.1 Mögliche Umformungen einer Gleichung:

Beide Seiten der Gleichung...

... mit etwas addieren

... mit etwas subtrahieren

... mit etwas multiplizieren

... mit etwas dividieren

... in eine Funktion einsetzen (z.B. mit einer Zahl potenzieren oder Wurzel ziehen)

Beispiel: Die Telefonrechnung von Hägar beträgt im Februar 12,30€. Die Grundgebühr ist 2,40€ und eine Gesprächseinheit kostet 0,30 $\frac{\text{€}}{\text{min}}$. Hägar weiß nicht, wie viel Minuten er telefoniert hat: Es gilt

$$12,30\text{€} = 0,30\text{€/min} \cdot x + 2,40\text{€}$$

. Da er die Anzahl der Minuten nicht kennt, wurde dafür ein x in die Gleichung eingesetzt. Das Ziel ist nun, die

Gleichung so zu verändern, dass links vom Gleichheitszeichen das x steht und alles andere auf der anderen Seite. Damit die Rechnung übersichtlicher wird, werden im Weiteren alle Einheiten weggelassen:

$$\begin{array}{rcl} 12,30 & = & 0,30 \cdot x + 2,40 \quad | -2,40 \\ 12,30 - 2,40 & = & 0,30 \cdot x \\ 9,90 & = & 0,30 \cdot x \\ 9,90 & = & 0,30 \cdot x \quad | :0,30 \\ \frac{9,90}{0,30} & = & x \\ 33 & = & x \quad | \text{Seiten vertauschen} \\ x & = & 33 \end{array}$$

15.3.2 Lösbarkeit von Gleichungen

Grundsätzlich gilt, wenn bei der Lösung einer Gleichung ein Widerspruch auftaucht, gibt es **keine** Lösung für diese Gleichung:

Beispiel: $x + 6 = x - 5$ Wenn von beiden Seiten ein x abgezogen wird, dann folgt $\Rightarrow 6 = -5$ Dies ist ein Widerspruch und das wird mit einem Blitz symbolisiert: $\nexists$

Wenn eine Lösung gleich Null ist, dann ist dies eine vollwertige Lösung und **kein** Widerspruch:

Beispiel: $3 \cdot x - 5 \cdot x = 0 \Rightarrow x \cdot (3 - 5) = 0 \Rightarrow x \cdot 2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Beispiele für mathematische Widersprüche

- Gleichsetzen, was nicht gleich ist: $6 = 0 \Rightarrow \nexists$
- Quadratwurzel aus negativen Zahlen: $\sqrt{-9} \Rightarrow \nexists$

15.4 Lineare Gleichungen

lineare Gleichungen erkennen

Bei linearen Gleichungen tritt die gesuchte Variable ohne einen Exponenten auf. Folgende Gleichungen sind linear bezüglich x :

$$\begin{array}{l} 2 \cdot x - 3 = 4 \\ 4^2 \cdot x = 3 \cdot x - 5 \\ 2 \cdot a^4 \cdot x - 3 = x \end{array}$$

$3 \cdot x^2 - x = 6$ ist keine lineare Gleichung bezüglich x , weil das x^2 einen Exponenten in x hat. Weil der Exponent hier eine Zwei ist, ist diese Gleichung eine quadratische Gleichung (siehe nächstes Kapitel).

15.5 Quadratische Gleichungen

Wenn die gesuchte Variable in einer Gleichung im Quadrat auftaucht, liegt eine quadratische Gleichung vor. Das Besondere an quadratischen Gleichungen ist, dass sie in der Regel **zwei** Lösungen haben.

Eine quadratische Gleichung enthält die gesuchte Variable im Quadrat und oft auch zusätzlich noch in einfacher, d.h. in linearer Form:

$$-4 \cdot x^2 + 4 \cdot x = -8$$

Quadratische Gleichungen lassen sich immer in die **Normalform** bringen:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

In der Normalform steht vor dem x^2 keine Zahl und auch kein Vorzeichen. **Erst wenn die Normalform gebildet ist**, darf zur Lösung einer quadratischen Gleichung die sogenannte p-q-Formel¹ angewendet werden:

p-q-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} -4 \cdot x^2 + 4 \cdot x &= -8 \\ \Rightarrow -4 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 8 &= 0 \end{aligned}$$

Normalform bilden heißt hier, durch (-4) zu teilen:

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

Hier ist $p = -1$ und $q = -2$

Einsetzen in die p-q-Formel:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{(-1)}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (-2)} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ und } x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

Sonderfall $p = 0$

Wenn in der Normalform $p = 0$ ist, so ist es nicht nötig, die p-q-Formel anzuwenden.

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } x^2 - 6,25 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 &= 6,25 \\ \Rightarrow x_{1,2} &= \pm \sqrt{6,25} = \pm 2,5 \end{aligned}$$

Sonderfall erste oder zweite binomische Formel

Lässt sich eine Gleichung als erste oder zweite binomische Formel gleich Null setzen, so gibt es nur **eine** Lösung der quadratischen Gleichung:

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } x^2 + 14 \cdot x + 49 &= 0 \\ \Rightarrow (x + 7)^2 &= 0 \\ \Rightarrow x + 7 &= 0 \end{aligned}$$

Dann ist die einzige Lösung $x = -7$

Andere Lösungsformeln Oft wird das Normalisieren der quadratischen Gleichung vergessen. Es gibt auch Gleichungen, die ohne Normalisieren auskommen, wie die **Mitternachtsformel**. Gegeben ist eine Gleichung der Form

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

dann sind die Lösungen dieser Gleichung:

Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diese Lösungsformel hat ihren Namen von der etwas veralteten pädagogischen Idee: Man müsse einen Schüler um Mitternacht aus dem Bett holen können, und er müsste sofort in der Lage sein diese Gleichung aufzulösen.

Ausgehend von der Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ kann man sich statt der Mitternachtsformel auch eine einfachere Gleichung merken:

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Diese Gleichung muss noch nach x umgestellt werden, was zur Mitternachtsformel führt. Wer schon Differenzialrechnung kennt, wird auf der linken Seite der Gleichung die Ableitung des quadratischen Ausgangsterms entdecken.

Tatsächlich ist für diejenigen, die sicher lineare Gleichungen umstellen können, diese letzte Lösungsformel für quadratische Gleichungen wohl am einfachsten zu handhaben.

¹Sie finden diese Formel auch häufig in der Form: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

16 Lösen von Gleichungssystemen mit zwei Variablen

16.1 Gleichungssysteme

Wenn mehr als eine Variable berechnet werden soll, dann braucht man mehrere Gleichungen. Dazu gilt die Faustregel:

Um eine Lösung für mehrere Variablen zu finden, benötigt man so viel (unterschiedliche) Gleichungen, wie es Variablen gibt.

Mehrere Gleichungen für mehrere Variablen sind ein **Gleichungssystem**.

Beispiel: Ein Hotel hat 50 Zimmer, darunter sind Zweibett- und Dreibettzimmer. Mit 118 Gästen wäre das Hotel ausgebucht. Wie viel Zweibettzimmer (Z) und wie viel Dreibettzimmer (D) gibt es?

Zwei Informationen lassen sich hier in Gleichungen fassen: Die Anzahl der Zimmer und die Anzahl der darauf verteilten Menschen:

$$A) \quad Z + D = 50 \text{ und}$$

$$B) \quad 2 \cdot Z + 3 \cdot D = 118$$

Es gibt drei gleichwertige Verfahren, so ein System aus linearen Gleichungen zu lösen:

16.2 Lösen linearer Gleichungssysteme

Wenn mehrere Gleichungen mit mehreren Variablen vorliegen, besteht die Lösung immer darin, jeweils **eine** Gleichung mit nur **einer** Variablen zu erzeugen. Diese kann einfach ausgerechnet werden. Dazu muss jeweils eine Variable „eliminiert“ werden. Genau dazu dienen die folgenden Verfahren.

16.2.1 Einsetzungsverfahren

Bei diesem Lösungsverfahren wird eine Gleichung wie sie ist oder auch umgeformt in die andere Gleichung eingesetzt: Gleichung A) kann umgeformt werden zu

$$Z = 50 - D.$$

Diese Gleichung erlaubt es uns, in Gleichung B) jedes Z durch $50 - D$ zu ersetzen:

$$\begin{aligned} B) \quad & 2 \cdot (50 - D) + 3 \cdot D = 118 \\ & \Rightarrow 100 - 2 \cdot D + 3 \cdot D = 118 \\ & \Rightarrow D = 18 \end{aligned}$$

Mit $Z = 50 - D$ folgt daraus $Z = 32$

16.2.2 Additions-/Subtraktions-Verfahren

Man darf, um eine Variable „loszuwerden“, auch eine Gleichung - wie sie ist oder auch umgeformt - zur anderen Gleichung addieren oder sie von einander abziehen:

Wird Gleichung A) mit (-2) multipliziert so ergibt sich:

$$-2 \cdot Z - 2 \cdot D = -100$$

Wird diese Gleichung zur Gleichung B) addiert, fällt die Variable Z heraus und D kann berechnet werden:

$$\begin{array}{rcl} -2 \cdot Z & -2 \cdot D & = -100 \\ 2 \cdot Z & +3 \cdot D & = 118 \\ \hline & D & = 18 \end{array}$$

Nun $D = 18$ in Gleichung A) einsetzen:

$$Z + 18 = 50 \Rightarrow Z = 50 - 18 = 32$$

16.2.3 Gleichsetzungsverfahren

Oft liegen Gleichungen schon so vor, dass sie nach einer Variablen aufgelöst sind. So könnten Gleichungen A) und B) auch folgendermaßen umgeformt werden:

$$A) \quad Z = 50 - D \text{ und}$$

$$B) \quad Z = 59 - 1,5D$$

Die rechten Seiten der Gleichungen sind beide so groß wie die Variable Z . Also kann man sie gleichsetzen:

$$\begin{array}{rcl} 50 - D & = 59 - 1,5D & | +1,5D \\ 50 - D + 1,5D & = 59 & | -50 \\ \Rightarrow -D + 1,5D & = 59 - 50 & \\ \Rightarrow 0,5D & = 9 & | \cdot 2 \\ \Rightarrow D & = 18 & \end{array}$$

Jetzt kann in einer der Gleichungen A) oder B) für D die 18 eingesetzt werden um auch Z zu bestimmen.

17 Lösungen

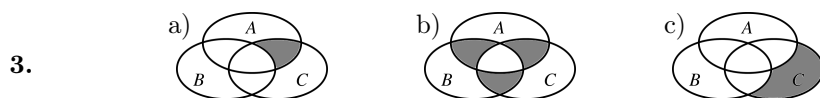
Lösungen zur Mengenlehre

1. Die Menge der natürlichen Zahlen ist Teilmenge der Menge der ganzen Zahlen, die Menge der ganzen Zahlen ist Teilmenge der Menge der rationalen Zahlen und die Menge der rationalen Zahlen ist Teilmenge der Menge der reellen Zahlen.

2.

- a) $M = C \setminus (A \cup B)$
- b) $M = C \cap (A \cup B)$
- c) $M = (B \setminus C) \cup (A \cap B \cap C)$

Hier sind auch andere Formulierungen möglich.



4. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ $C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$

- a) $A \cap B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- b) $B \cup C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, \dots\}$
- c) $B \setminus C = \{5, 7, 9\}$
- d) $A \cup B = A$ weil $B \subset A$
- e) $(A \cap B) \setminus C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- f) $B \cap C$

Lösungen zur Bruchrechnung

1. Rezepte zur Umrechnung von Brüchen in Dezimalzahlen

- a) Dezimalzahlen mit einer *festen Anzahl* von Kommastellen:
 - Zählen Sie die Stellen hinter dem Komma. Diese Anzahl nennen Sie n .
 - Schreiben Sie nun die Dezimalzahl *ohne Komma* auf einen Bruchstrich und unter den Bruchstrich die Zahl 10^n . 10^n ist eine Zahl die vorne eine Eins hat und dahinter n Nullen.
 - Kürzen Sie diesen Bruch so weit wie möglich.
- b) Dezimalzahlen mit *einer Anzahl periodisch wiederkehrender Zahlen*
 - Geben Sie ihrer Dezimalzahl einen Namen, zum Beispiel q
 - Zählen Sie die Anzahl der Stellen, die sich periodisch wiederholen. Diese Anzahl nennen Sie m .
 - Multiplizieren Sie q mit 10^m , einer 1 gefolgt von m Nullen.

– Nun haben Sie ein Gleichungssystem. Sie ziehen die Gleichung $q = \dots$ von der Gleichung $q \cdot 10^m = \dots$ ab

$$\begin{array}{rcl} q \cdot 10^m & = & \dots \\ q & = & \dots \\ \hline (10^m - 1)q & = & \dots \end{array}$$

Nun stellen Sie noch die Gleichung nach q um:

$$q = \frac{10^m \cdot q - q}{10^m - 1}$$

– Kürzen Sie den Bruch so weit wie möglich.

2. Sortieren Sie folgende Zahlen und Brüche nach ihrem Wert.

$$\begin{aligned} \frac{15}{32} &= \frac{36}{72} = \frac{52}{104} = \frac{0,25}{0,5} = \frac{9,9}{19,8} = 0,5 \\ \frac{5}{8} &= \frac{60}{96} = 0,625 = \frac{\frac{10}{32}}{\frac{4}{8}} = \frac{0,25}{0,4} \\ 0,75 &= \frac{3}{4} = \frac{12}{16} = \frac{39}{52} = \frac{1}{3} = \frac{1500}{2000} \end{aligned}$$

3. Berechnen Sie:

- a) $4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$
- b) $\frac{3}{7} + \frac{1}{2} = \frac{6}{14} + \frac{7}{14} = \frac{13}{14}$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

d) $\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{2}{15}$

e) $\frac{12}{5} : \frac{16}{15} = \frac{12}{5} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15}{5} \cdot \frac{12}{16} = 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

f) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{3}{8} + \frac{5}{6} = \frac{9}{24} + \frac{20}{24} = \frac{29}{24}$

g) $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} = \frac{3}{12} - \frac{2}{18} = \frac{9}{36} - \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$

d) $\frac{268}{1000} = 0,268$

e) $\frac{46}{1000} = 0,046$

f) $\frac{45}{5} = 9$

g) $\frac{26}{9} = 2,\overline{8}$

h) $q = \frac{1}{9}$

i) $q = \frac{2113}{99}$

j) $0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$

k) $q = \frac{100}{999}$

l) $q = \frac{15204100}{333333}$

4. Wandeln Sie folgende Brüche in Dezimalzahlen und die Dezimalzahlen in Brüche um

a) $\frac{7}{8} = 0,875$

b) $\frac{4}{10} = 0,4$

c) $\frac{73}{100} = 0,73$