Das Summenzeichen

Das Summenzeichen $\sum_{i=m}^{n}\dots$ ist eine abkürzende Schreibweise für lange Summen. Das i ist der **Laufindex** des Summenzeichens, das m ist die **untere Grenze** und das n ist die **obere Grenze.**

Beispiele:

$$\sum_{i=1}^{5} i=1+2+3+4+5\ ,\quad \sum_{i=3}^{6} i=3+4+5+6\ ,\quad \sum_{i=1}^{4} i^2=1^2+2^2+3^2+4^2\ ,\quad \sum_{i=3}^{5}(2^i+i)=(2^3+3)+(2^4+4)+(2^5+5)$$

$$\sum_{i=1}^{10}\left((-1)^i\cdot i\right)=-1+2-3+4-5+6-7+8-9+10\ ,\quad \sum_{i=1}^{100}(x_i-\bar{x})^2=(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_{100}-\bar{x})^2$$

oder die Formel des arithmetischen Mittels: $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n)$

Rechenregeln für Summenzeichen

Summen mit Faktoren:

$$\sum_{i=1}^{20} 7\cdot i=7\cdot 1+7\cdot 2+7\cdot 3+\dots+7\cdot 20=7\cdot(1+2+\dots+20)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a\cdot i=a\cdot\sum_{i=1}^{n} i}$$

Summen mit Summen:

$$\sum_{i=1}^{15}(i^2+i)=(1^2+1)+(2^2+2)+\dots+(15^2+15)=1^2+2^2+\dots+15^2+1+2+\dots+15$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(i^2+i)=\sum_{i=1}^{n} i^2+\sum_{i=1}^{n} i}$$

Summen mit Konstanten:
(d.h. hinter dem Summenzeichen steht kein Laufindex i)

$$\sum_{i=1}^{10} 5=\underbrace{5+5+5+\dots+5}_{10\,mal}=10\cdot 5$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} c=n\cdot c}$$

Spezielle Summen

$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$ und $\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$

Auch unendlich viele Summanden sind möglich, das Ergebnis ist oft durchaus endlich: $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i=1$

Es gilt sogar allgemeiner: $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^i=\frac{1}{n-1}$

Aufgaben

Schreibe folgende Summen mit Summenzeichen:

a) $5+6+7+8+9+10+11$ b) $10+20+30+40+50$ c) $1-4+9-16+25-36+49$

Berechne:

d) $\sum_{i=10}^{15}(2\cdot i)$ e) $\sum_{i=21}^{25}(2\cdot i+1)$ f) $\sum_{n=1}^{5}(10\cdot n+n)$

Beispiele und Übungen für das Rechnen mit Summenzeichen

Die Herleitung der Summe $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Von der Summe $\sum_1^n i$ ist überliefert, dass sie von dem damaligen Grundschüler Johann Carl Friedrich Gauss entdeckt wurde. Er sollte alle Zahlen von 1 bis 100 zusammenzählen, also $\sum_1^{100} i = ?$ Da kam er auf die Idee, einfach die Reihenfolge der Summanden zu vertauschen:

$$\sum_1^{100} i = (1+100)+(2+99)+(3+98)+(4+97)+... = 101+101+101+101+... = 50\cdot 101 = 5050$$

Wenn man die 100 durch ein n ersetzt, dann erhält man die allgemeine Formel $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}\cdot(n+1)$

Übung: Die Herleitung der Summe $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$

Die folgenden Rechnungen sind absichtlich nicht ausführlich dokumentiert, damit es sich lohnt, diese Rechnungen selbst Schritt für Schritt zur Kontrolle einmal nachzurechnen. Dabei werden Sie die umseitigen Rechenregeln für das Rechnen mit Summenzeichen brauchen.

Wenn man sich die Quadratzahlen ansieht, dann kann man sie als Summe von ungeraden Zahlen schreiben:

$2^2=1+3$, $3^2=1+3+5$, $4^2=1+3+5+7$ Allgemeiner lässt sich auch das als Summe schreiben:

$n^2=\sum_{i=1}^{n}(2\cdot n-1)$ Die Summe der Quadratzahlen ist also $1+4+9+16+... =$

$$\begin{array}{l} 1+ \\ 1+3+ \\ 1+3+5+ \\ 1+3+5+7 \\ ... \end{array}$$

Die 1 kommt n -mal in der Summe vor, die 3 kommt $n-1$ mal vor u.s.w.

Daher kann man auch schreiben: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(n+1-i)}_{\substack{\text{herunterzählen} \\ \text{von } n \text{ zu } 1}} \cdot \underbrace{(2\cdot i-1)}_{\substack{\text{ungerade Zahlen} \\ \text{von } 1 \text{ nach oben}}}$

Ausmultiplizieren der Klammern ergibt:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} (-2\cdot i^2+2\cdot i\cdot n+3\cdot i-n-1) = \sum_{i=1}^{n} (-2\cdot i^2+(2\cdot n+3)\cdot i-n-1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = -2\cdot\sum_{i=1}^{n} i^2+(2\cdot n+3)\cdot\sum_{i=1}^{n} i-\sum_{i=1}^{n} n-\sum_{i=1}^{n} 1$$

Jetzt kann man die Summen mit dem i^2 auf die linke Seite bringen, also $+2\cdot\sum_{i=1}^{n} i^2$

$\Rightarrow 3\cdot\sum_{i=1}^{n} i^2 = (2\cdot n+3)\cdot\sum_{i=1}^{n} i-\sum_{i=1}^{n} n-\sum_{i=1}^{n} 1$ Für die Summe über i haben wir oben die Formel von Gauß

und wenn etwas summiert wird, wo gar kein Laufindex i vorkommt, wie bei $\sum_{i=1}^{n} n$, dafür gibt es auf der vorhergehenden Seite auch eine Rechenregel. Wenn Sie nun alles ausmultiplizieren und die gesamte Gleichung noch durch 3 teilen, dann erhalten Sie die gesuchte Formel für die Summe der Quadratzahlen.

Eine Aufgabe mit einem wirklich überraschenden Ergebnis

Rentendynamik:

Ein Betrieb zahlt seinen langjährigen Mitarbeitern eine Zusatzrente: Nach 5-jähriger Betriebszugehörigkeit erhält ein Arbeitnehmer einen Rentenanspruch von 120 € **pro Jahr**, der sich für jedes weitere Jahr um weitere 10 € erhöht. Nun soll neu verhandelt werden:

Vorschlag 1: Mit jedem weiteren Jahr erhöht sich die Rente um 20 €.

Vorschlag 2: Mit jedem halben Jahr erhöht sich die Rente um 6 €.

Rechnerische Darstellung der Vorschläge mit Hilfe eines Summenzeichens für n Jahre:

$$Rente1(n) = 120 + 20 \cdot \sum_{i=0}^{n} n$$

$$Rente2(n) = 120 + 6 \cdot \sum_{i=0}^{2 \cdot n} n$$

Aufgabe

1. Kontrollieren Sie die mathematische Schreibweise der beiden Vorschläge mit dem Summenzeichen. Gehen Sie sicher, dass die Formeln den Text auch beschreiben.
2. Berechnen Sie, welcher Vorschlag der günstigere ist, wenn davon ausgegangen wird, dass die Mitarbeiter dem Betrieb viele Jahre treu bleiben.