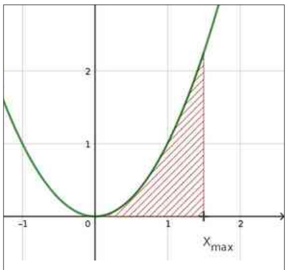
***Integralrechnung**: Ein Beispiel für die Berechnung einer Fläche unter einem Grafen im Intervall $[0; x_{xmax}]$ mit Riemannscher Streifenzerlegung*

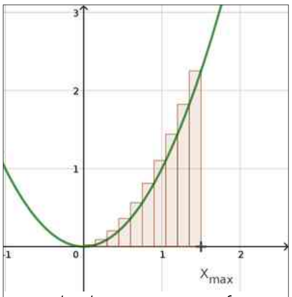
Das Berechnen von Flächen mit den Regeln der Geometrie gelingt normalerweise nur mit bekannten einfachen geometrischen Objekten, wie Vielecke, Kreise oder Ellipsen. Dafür gibt es jeweils eine Lösungsformel, die sich in jeder Formelsammlung nachschlagen lässt. Die Integration ermöglicht die Berechnung einer Fläche zwischen einem beliebigen Funktionsgrafen $f(x)$ und der Abszisse.



Die Fläche unter dem Grafen

Die Herleitung so einer Flächenberechnung stammt von *Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).* Die Idee soll hier beispielhaft an der Funktion $f(x) = x^2$ gezeigt werden.

Riemann kam auf die Idee, die Fläche als eine erste Näherung zuerst in lauter senkrechte Streifen zu unterteilen. In der Abbildung rechts ist die Fläche in 10 Streifen unterteilt worden. Die Höhe der Streifen ist jeweils der Funktionswert an der rechten Streifenseite und die Breite eines Streifens ist $dx = \frac{x_{max}}{\text{Anzahl Streifen}}$



Die Fläche in 10 Streifen unterteilt

Natürlich ist dies nur eine Näherung für die tatsächliche Fläche unter dem Funktionsgrafen. Aber die Rechnung kann beliebig genau gemacht werden, in dem man einfach die Anzahl der Streifen erhöht. Die einzelnen Streifen selbst werden dann immer schmaler.

Mathematisch kann man die Fläche sogar in *unendlich viele* und damit auch *unendlich schmale* Streifen unterteilen, und dann ist das Ergebnis die exakte Fläche unter dem Funktionsgrafen.

Damit die Anzahl der Streifen verändert werden kann, wird im Folgenden für diese Anzahl die Variable n eingesetzt. Auch die rechte Grenze der Fläche wird durch eine Variable x_{max} dargestellt. Die Breite eines Balkens ist dann $dx = \frac{x_{max}}{n}$. Man kann die Balken von links nach rechts durchnummerieren, die Nummern sind dann $i = 1 \ldots n$. Die x-Koordinate des i-ten Balkens ist $x_i = i \cdot dx = i \cdot \frac{x_{max}}{n}$.

Die Fläche eines jeden Balkens ist „Höhe mal Breite“, also $f(x_i) \cdot dx$. Nun müssen alle Flächen zusammengezählt werden, was mit dem Summenzeichen möglich ist. Wir erinnern uns, dass die Funktionsgleichung $f(x) = x^2$ war:

$$F = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot dx = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \cdot dx = \sum_{i=1}^{n} (i \cdot \frac{x_{max}}{n})^2 \cdot \frac{x_{max}}{n}$$

Das lässt sich nach den Regeln des Rechnens mit Summenzeichen folgendermaßen zusammenfassen:

$$F = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot dx = \sum_{i=1}^{n} i^2 \cdot (\frac{x_{max}}{n})^3 = (\frac{x_{max}}{n})^3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 \qquad \text{mit} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

wird F zu

$$F = \left(\frac{x_{max}}{n}\right)^3 \cdot \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = \frac{x_{max}^3}{n^3} \cdot \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = x_{max}^3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot n} + \frac{1}{6 \cdot n^2}\right)$$

Wenn man nun die Anzahl der Streifen n gegen unendlich gehen lässt, dann werden alle Brüche, bei denen ein n im Nenner steht, zu Null und es bleibt als exakte Fläche unter dem Funktionsgrafen:

$$F = \lim_{n \to \infty} x_{max}^3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot n} + \frac{1}{6 \cdot n^2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3} \cdot x_{max}^3}}$$ das ist die „Stammfunktion“ von $f(x) = x^2$

Und so erklärt sich die Schreibweise eines Integrals: $F(x_{max}) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot dx = \int_0^{x_{max}} f(x)dx$

Die **Streifenbreite** dx wird in der Mathematik **Differential** genannt.